家一寒假作業 第一冊 數學

例 1:在坐標平面上描出下列各點：

$A(3,2)$、$B(2,-3)$、$C(-1,-2)$、$D(0,5)$、$E(-4,4)$、$F(2,0)$。

例 2:(點到點距離)設平面上兩點 $P(1,3)$、$Q(9,9)$，求 P、Q 兩點的距離。

解: $\sqrt{(x\text{相差})^2+(y\text{相差})^2}$

利用平面上兩點的距離公式

$$\overline{PQ}=\sqrt{(9-1)^2+(9-3)^2}=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$$

Ex1.設平面上兩點 $P(5,2)$、$Q(8,6)$，求 P、Q 兩點的距離。 答:5

Ex2.設平面上兩點 $P(-5,3)$、$Q(0,15)$，求 P、Q 兩點的距離。 答:13

例 3:(中點公式)設坐標平面上相異兩點 $P(-1,2)$、$Q(3,6)$，求 $\overline{PQ}$ 的中點坐標。

解: 中點= $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$

用中點坐標公式得 $x=\frac{-1+3}{2}=1$，$y=\frac{2+6}{2}=4$

故 $\overline{PQ}$ 的中點坐標為(1 , 4)

Ex1.設坐標平面上相異兩點 $P(-2,3)$、$Q(4,5)$，求 $\overline{PQ}$ 的中點坐標。 答:(1 , 4)

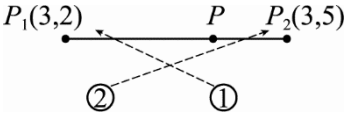
Ex2.求平面上兩點 $P(2,-4)$、$Q(8,0)$的中點坐標。 答:(5 , – 2)

例 4:(分點公式)設 $P_1(3,2)$、$P_2(3,5)$、$P(x,y)$ 為同一直線上相異三點，若 P 在線段 $\overline{P_1P_2}$ 上，且 $\overline{P_1P}:\overline{PP_2}=2:1$，求 P 點坐標。

解: 因為 $\overline{P_1P}:\overline{PP_2}=2:1$ 利用分點坐標公式得

$$x=\frac{1\times3+2\times3}{2+1}=3 \qquad y=\frac{1\times2+2\times5}{2+1}=4$$

故 P 點坐標為(3 , 4)



Ex1.設 $P_1(1,2)$、$P_2(5,6)$、$P(x,y)$為同一直線上相異三點，若 P 在線段 $\overline{P_1P_2}$ 上，且 $\overline{P_1P}:\overline{PP_2}=1:3$，求 P 點坐標。 答:(2 , 3)

Ex2.設 $P_1(1,0)$、$P_2(-5,3)$、$P(x,y)$為同一直線上相異三點，若 P 在線段 $\overline{P_1P_2}$ 上，且 $\overline{P_1P}:\overline{PP_2}=2:1$，求 P 點坐標。 答:(– 3 , 2)

例 5:(過兩點的直線斜率)求經過下列各點的直線之斜率：

(1)(1 , 6)與(− 1 , 2)。

(2)(5 , 1)與(− 2 , 1)。

(3)(− 3 , 1)與(− 3 , − 1)。

解: 斜率 m=$\frac{y\text{相減}}{x\text{相減}}$

(1)斜率 $m=\frac{6-2}{1-(-1)}=\frac{4}{2}=2$

(2)斜率 $m=\frac{1-1}{5-(-2)}=\frac{0}{7}=0$

(3)因為 $x_1=x_2=-3$，所以斜率 m 不存在，此直線垂直於 x 軸

Ex1.求經過下列各點的直線之斜率：

(1)(6 , − 3)與(− 2 , 5)。

(2)(8 , − 2)與(4 , − 2)。

(3)(3 , − 5)與(3 , 2)。 答:(1) − 1;(2)0;(3)不存在

Ex2.求經過下列各點的直線之斜率：

(1)(5 , 2)與(− 2 , − 3)。

(2)(− 1 , 0)與(4 , 0)。

(3)(− 4 , 5)與(− 4 , 2)。 答:(1)$\frac{5}{7}$;(2)0;(3)不存在

例 6:(過兩點的直線斜率)求下列各直線的斜率：

(1)直線 $2x+3y+6=0$。

(2)直線 $x-2y+3=0$。

(3)直線 $2y-1=0$。

(4)直線 $x+2=0$。

解: 斜率 m=$-\frac{x\text{係數}}{y\text{係數}}$

(1)直線 $2x+3y+6=0$ 的斜率為 $-\frac{2}{3}$

(2)直線 $x-2y+3=0$ 的斜率為 $\frac{1}{2}$

(3)直線 $2y-1=0$ 的斜率為 0

(4)直線 $x+2=0$ 的斜率不存在

Ex1.求下列各直線的斜率：

(1)直線 $3x+2y+6=0$。

(2)直線 $2x-y+4=0$。

(3)直線 $3y+2=0$。

(4)直線 $2x-1=0$。 答:(1) $-\frac{3}{2}$;(2)2;(3)0;(4)不存在

Ex2.求下列各直線的斜率：

(1)直線 $x-2y-3=0$。

(2)直線 $5x+y+2=0$。

(3)直線 $y=2$。

(4)直線 $x+5=0$。 答:(1) $\frac{1}{2}$;(2) − 5;(3)0;(4)不存在

例 7:(點斜式)求滿足過點(2 , − 1)且斜率為 3 的直線方程式。

解: 點斜式 $y-y_0=m(x-x_0)$

利用點斜式得直線方程式 $y-(-1)=3(x-2)$

化簡得 $3x-y-7=0$

Ex1.試求滿足過點(− 5 , 3)且斜率為 2 的直線方程式。 答:$2x-y+13=0$

Ex2.試求滿足過點(3 , − 2)且斜率為 0 的直線方程式。 答: $y+2=0$

例 8:(斜截式)求滿足斜率為 3，y 截距為 2 的直線方程式。

解: 斜截式 $y = mx + b$

利用斜截式得 $y = 3x + 2$

Ex1.求滿足斜率為 2，y 截距為 -5 的直線方程式。 答:$y = 2x - 5$

Ex2.求滿足斜率為-1，y 截距為 3 的直線方程式。 答:$y = -x + 3$

例 9:(點到直線距離)求點$(3, -2)$到直線 $L: 4x + 3y + 4 = 0$ 的距離。

解: $\mathbf{d} = \frac{|\text{點帶入}|}{\sqrt{(x\text{係數})^2 + (y\text{係數})^2}}$

點$(3, -2)$到直線 $L: 4x + 3y + 4 = 0$ 的距離 $d = \frac{|4 \times 3 + 3 \times (-2) + 4|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{10}{5} = 2$

Ex1.求點$(-2, 3)$到直線 $L: 3x - 4y = 2$ 的距離。 答:4

Ex2.求點$(5, -8)$到直線 $L: x - 4 = 0$ 的距離。 答:1

例 10:(餘式定理) 求 $2x^4 + x^3 - 2x^2 + 3$ 除以 $x - 1$ 的餘式。

解: $f(x) \div (x - 1)$的餘式$= f(1)$

令 $f(x) = 2x^4 + x^3 - 2x^2 + 3$

利用餘式定理

得餘式為 $f(1) = 2(1)^4 + 1^3 - 2(1)^2 + 3 = 4$

Ex1.求 $x^{99} + 99$ 除以 $x + 1$ 的餘式。答:98

Ex2.求$(x + 3)^{10} + x$ 除以 $x + 2$ 的餘式。 答:-1

例 11:(因式定理)已知$(x + 1)$為 $f(x) = x^4 - 3x^2 + kx - 1$ 的因式，求 k 之值。

解: $(x + 1)$為$f(x)$的因式$\Leftrightarrow f(-1) = 0$

$f(-1) = (-1)^4 - 3(-1)^2 + k(-1) - 1 = 0$

得 $k = -3$

Ex1.已知$(x + 2)$為 $f(x) = x^3 + kx + 12$ 的因式，求 k 之值。 答:$k = 2$

Ex2.已知$(x - 2)$為 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + k$ 的因式，求 k 之值。 答:$k = -4$

例 12: k 為實數，若方程式 $x^2 + 2x - k = 0$ 有兩相等實數解，求 k 值。

解:當$b^2 - 4ac > 0$ 時，有兩相異實根

當$b^2 - 4ac = 0$ 時，有重根

當$b^2 - 4ac < 0$ 時，無實根

$\therefore$ 判別式 $b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times (-k) = 0$

$\Rightarrow 4 + 4k = 0$ 故 $k = -1$

Ex1.k 為實數，若方程式 $x^2 - 6x + k = 0$ 有兩相等實數解，求 k 值。 答:$k = 9$

例 13:(根與係數)若α、β 為方程式$x^2 - 2x - 3 = 0$ 的兩根，求下列各式的值：

(1) $\alpha + \beta$ (2) $\alpha \times \beta$ (3) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

(4) $\alpha^2+\beta^2$　(5) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$ 。

解:兩根之和$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$ 兩根之積$\alpha\times\beta=\frac{c}{a}$

其中 $\mathbf{a=1}$　$\mathbf{b=-2}$　$\mathbf{c=-3}$

(1) $\alpha+\beta=2$

(2) $\alpha\times\beta=-3$

(3) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{2}{3}$

(4) $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\,\alpha\beta+\beta^2$

$2^2=\alpha^2+\beta^2+2\times(-3)$

$\alpha^2+\beta^2=10$

(5) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=-\frac{10}{3}$

Ex1.若 α、β 為方程式 $x^2+3x+1=0$ 的兩根，求下列各式的值：

(1) $\alpha+\beta$　(2) $\alpha\times\beta$　(3) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

(4) $\alpha^2+\beta^2$。　答:(1) -3;(2)1;(3) -3;(4)7

Ex2.若 α、β 為方程式 $x^2+5x+2=0$ 的兩根，求下列各式的值：

(1) $\alpha+\beta$　(2) $\alpha\times\beta$　(3) $\alpha^2+\beta^2$

(4) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$ 。　答:(1) -5;(2)2;(3)21;(4) $\frac{21}{2}$